2021年度入学試験問題
情報科学部公募推薦入学試験

数　　学　(90分)

〈**注意事項**〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。また、解答用紙には解答だけを記述するのではなく、解答に至る途中の計算も明記しなさい。
3. 出題は高校数学の全分野にわたるので、解ける問題から取り組みなさい。
4. 問題文は2ページから6ページまでです。

[I]

三角形 ABC に対し，辺 BC，辺 CA，辺 AB の長さをそれぞれ a, b, c とおく．また，$\angle$CAB, $\angle$ABC, $\angle$BCA をそれぞれ A, B, C とする．この三角形 ABC はすべての角が $\pi/2$ 未満であるとする．

(1) 頂点 A から辺 BC に垂線を下ろすことで $a = b\cos C + c\cos B$ を示せ．

(2) 頂点 C から辺 AB に垂線を下ろすことで $a\sin B = b\sin A$ を示せ．

(3) 半径 1 の円を用いて三角関数 sin を定義せよ．その定義を用いて $\sin A = \sin(B+C)$ を示せ．

(4) 上記の (1) と (2) の関係式から，

$$\sin A = \sin B\cos C + \frac{c}{b}\sin B\cos B$$

が分かる．ここで，B と C，b と c を入れ替えることで

$$\sin A = \sin C\cos B + \frac{b}{c}\sin C\cos C$$

が成り立つことも分かる．上の問題と関連して，

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

である．ここまでで導出した関係式を用いて

$$\sin(B+C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$$

を証明せよ．

[II]

二つの放物線 $C_1: y = ax^2 + b^2x + a^2$ と $C_2: y = -b^2x^2 + ax + 2b^2x + a^2$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a > 0$, $b > 0$ である．

(1) C_1 と C_2 のグラフの共有点の座標を求めよ．

(2) C_1 と C_2 に囲まれた領域の面積を S とする．S を a, b の式で表せ．

(3) $a + b = 2$ のとき，S が最小となる a, b とそのときの S の値を求めよ．

[III]

次の問に答えなさい.

(1) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい.

$$a_1 = 2,\ \ a_2 = 3,\ \ 2a_{n+2} = 5a_{n+1} - 2a_n$$

(2) (1) で求めた a_n を表わす数式を n の関数 $f(n)$ とする. この関数の定義域を実数全体とした場合を考える. このとき, $f(n)$ が最小値を取るときの n を求めなさい.

[IV]

複素数 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$ について、以下の問いに答えよ。

(1)　z^2 を求めよ。

(2)　$|z^6|$ を求めよ。

(3)　$|z^n|$ を n の式で表し、$\lim_{n\to\infty}|z^n|$ を求めよ。

[V]

(1) 導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を用いて，微分可能な関数 $f(x), g(x)$ の積の導関数の公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を導出せよ．

(2) s, t を実数として，関数の積の導関数の公式を用いて

$$f(t)g(t) - f(s)g(s) = \int_s^t f'(x)g(x)dx + \int_s^t f(x)g'(x)dx$$

を導出せよ．

(3) 正の実数 $x > 0$ に対して，

$$\lim_{h \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = 1$$

であることを用いて，

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

を導出せよ．

(4) a は $0 < a < 1$ を満たす実数とし，

$$f(x) = \log x - a(x-1)$$

とする．ただし，$f(x)$ の定義域を $x > 0$ とする．$y = f(x)$ は $x = 1$ で x 軸と交わり，さらに $x > 1$ で x 軸と 1 回だけ交わる．この交点を $(p, 0)$ とおき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた領域の面積を S とおく．ここで

$$S = \int_1^p \log x - a(x-1)dx = \int_1^p x'(\log x - a(x-1))dx$$

であることに着目して部分積分を行い

$$S = \frac{1}{2}(p-1)(ap+a-2)$$

が成り立つことを示せ．