2022年度入学試験問題

情報科学部公募推薦入学試験

数　　学　(90分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。また、解答用紙には解答だけを記述するのではなく、解答に至る途中の計算も明記しなさい。
3. 出題は高校数学の全分野にわたるので、解ける問題から取り組みなさい。
4. 問題文は2ページから6ページまでです。

[I]

a, b を $a < -\dfrac{1}{2}, b < 0$ を満たす定数とする。次の問いに答えよ。

(1)　x についての不等式 $x^2 - (2a+3)x + 2a + 2 < 0$ の解を求めよ。

(2)　x についての不等式 $x^2 + (2b+5)x + b^2 + 5b - 6 < 0$ の解を求めよ。

(3)　上記 (1)、(2) に現れる 2 つの不等式を同時に満たすような x が存在するために b が満たすべき必要十分条件を求めよ。ただし、必要十分条件の記述に a を用いてはならない。

[II]

次の問いに答えよ。ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

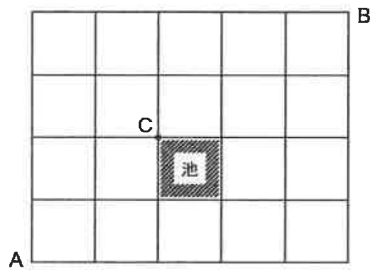
(1)　2^{100}, 3^{60} の大小を不等号を用いて表せ。

(2)　$100^{\log_{10} 2}$, π, $\sqrt[5]{81}$, $\sqrt[4]{27}$ の大小を不等号を用いて表せ。

(3)　5分で1個が2個に分裂する細胞があり、この細胞は分裂をちょうど5分毎に繰り返す。この細胞が1個から分裂して1億個以上になるのは何分後か答えよ。ただし、細胞が途中で死滅したり、細胞分裂しなくなる場合は考えなくて良い。

[III]

下の図は、ある地域の道を直線で示したものである。次の問いに答えよ。ただし、A, B, C は交差点の名前を示しており、交差点 C の右下の道で囲まれた区画は池になっている。



(1)　交差点 A から交差点 B まで遠回りをしないで行く最短の道順は、何通りあるか求めよ。

(2)　交差点 A から交差点 C を通って交差点 B まで遠回りをしないで行く最短の道順は、何通りあるか求めよ。

(3)　池沿いの道は危険であるため通らないことにするとき、交差点 A から交差点 B まで遠回りをしないで行く最短の道順は、何通りあるか求めよ。ただし、池沿いの道を通らずに池の角の交差点を通過するだけならば通って良いこととする (例えば、左から交差点 C に入り上には進んで良いが、右には池沿いであるため進むことができない)。

(4)　今、一人は A から B に向かって、もう一人は B から A に向かって、池沿いの道を通らず遠回りをしないで行く最短の道順をそれぞれが一つ決め、その決めた道順に沿って同じ速度で同時に歩き始めた。二人が途中で出会う道順の組み合わせは、何通りあるか求めよ。ただし、隣の交差点までの距離は全て同じであるとする。

[IV]

n は 2 以上の自然数とする。座標空間において、点 $O(0,0,0)$、点 $A(2n,0,0)$、点 $B(0,3n,0)$、点 $C(0,0,n)$ がある。座標空間において x 座標と y 座標と z 座標がすべて整数である点を格子点という。四面体 OABC の面 ABC 上の格子点の個数は以下の手順で求められる。k を 0 以上 n 以下の整数として、平面 $z=n-k$ と面 ABC が交わることでできる線分上の格子点を数えあげ、これを $N(k)$ とおく。そして $0 \leqq k \leqq n$ となるすべての k について $N(k)$ の総和を求めればよい。なお、ここでの面 ABC 上の点とは，三角形 ABC の内部の点と、線分 AB 上、線分 BC 上、線分 CA 上の点すべてを指す。点 A、点 B、点 C も、面 ABC 上の点に含む。次の問いに答えよ。

(1)　平面 $z=n$ と面 ABC の共有点は点 C のみである。$k \geqq 1$ のとき、平面 $z=n-k$ と面 ABC が交わることでできる線分は $(2k,0,n-k)$ と $(0,3k,n-k)$ を結ぶ線分である。このことに着目して $N(0)$、$N(1)$、$N(2)$ を求めよ。

(2)　$N(k)$ を求めよ。

(3)　面 ABC 上の格子点の個数を求めよ。

(4)　0 から $2n$ までの $2n+1$ 個の整数から 1 つの整数を選び x とする。ただし、整数の選び方 $2n+1$ 通りは、どの場合も同様に確からしいとする。同様に、0 から $3n$ までの $3n+1$ 個の整数から 1 つの整数を選び y として、0 から n までの $n+1$ 個の整数から 1 つの整数を選び z とする。点 (x,y,z) が面 ABC 上の点となる確率を求めよ。

[V]

放物線 $y=x^2$ があり、$p>0$ として、放物線上の点 $\mathrm{P}(p,p^2)$ にて接線を引く。その接線と直線 $x=p+p^{\frac{1}{3}}$ との交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。

(2) 点 P が $p>0$ の範囲で動く場合の点 Q の軌跡を描く関数を $y=f(x)$ とおく。$f(10)$ を求めよ。

(3) 区間 $[x_1,x_2]$ で連続である一般の関数 $f(x)$ に対し、x が微分可能な関数 $g(p)$ を用いて $x=g(p)$ と表せる場合に、

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

に対する $g(p)$ を用いた置換積分の公式は、$x_1=g(p_1)$、$x_2=g(p_2)$ として

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{p_1}^{p_2} f(g(p))g'(p)dp$$

である。この置換積分の性質を用いて、(2) の点 Q の軌跡を描く関数 $y=f(x)$ に対して、

$$\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^8 \left(p^2+\frac{7}{3}p^{\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}p^{\frac{2}{3}}\right)\ dp$$

であることを示せ。

(4)

$$\int_0^{10} f(x)dx$$

を求めよ。