2023年度入学試験問題
情報科学部公募推薦入学試験
数　学 (90分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。また、解答用紙には解答だけを記述するのではなく、解答に至る途中の計算も明記しなさい。
3. 出題は高校数学の全分野にわたるので、解ける問題から取り組みなさい。
4. 問題文は2ページから8ページまでです。

[I]

以下の問いに答えよ。ただし、$a \neq 0$ とする。

(1) 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフの頂点の座標を a, b, c で表せ。解答だけでなく導出の過程も示すこと。

(2) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して $b^2 - 4ac > 0$ が成り立つとき、解が 2 つだけ存在し、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

であることを証明せよ。

(3) $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$ のときの 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを描け。その際、頂点の位置に注意して図示すること。そして、このグラフが x 軸と 2 つの共有点をもつことに注意し、その各々の共有点の x 座標を図中に記載せよ。

[II]

以下の関数のグラフを解答用紙の範囲に描け。また、周期を求めよ。

$$y = 2 - 4\sin^2\frac{x}{4}$$

[III]

中身の見えない箱99個の中から3つを選んで開け、その中に入ってる賞金を得られるゲームを考える。99個の箱には1から99の整数が書かれており、箱を開けるまで中身を見ることはできない。1～99が書かれた箱のうち1つに1000円が入っている。1000円が入っている箱に書かれた整数が2から98のときは、1000円が入った箱に書かれている整数の1だけ小さい整数が書かれた箱と1だけ大きい整数が書かれた箱に500円が入っている。1000円が入っている箱に書かれた整数が「1」のときは「99」と「2」と書かれた箱に500円が入っており、1000円が入っている箱に書かれた整数が「99」のときは、「98」と「1」と書かれた箱に500円が入っている。3つの箱は同時に開けるものとする。

どの箱に賞金が入っているかを知らない太郎くんと花子さんが、このゲームで賞金獲得を目指すとき、どのような戦略で箱を選べば良いかを考えた。太郎くんは1000円と500円を同時に獲得することを優先するため、3つの連続する整数(ただし、99と1は連続する整数と定義する)が書かれた箱を選ぶのが良いと考えた。花子さんは、3の倍数が書かれた箱の中には必ず1000円か500円が入っている箱が存在することに注目し、異なる3つの3の倍数が書かれた箱を選ぶのが良いと考えた。

(1-1)　太郎君の考え方で箱を選んだとき、1000円が入った箱を選ぶ確率はいくらか。

(1-2)　太郎君の考え方で箱を選んだとき、500円が入った箱を1つ以上選ぶ確率はいくらか。

(1-3)　太郎君の考え方で箱を選んだとき、獲得賞金が500円以上である確率はいくらか。

(2-1)　花子さんの考え方で箱を選んだとき、1000円が入った箱を選ぶ確率はいくらか。

(2-2)　花子さんの考え方で箱を選んだとき、500円が入った箱を1つ以上選ぶ確率はいくらか。

(2-3)　花子さんの考え方で箱を選んだとき、獲得賞金が 500 円以上である確率はいくらか。

[IV]

以下の問いに答えよ。

(1)　任意の非負整数 n, k $(0 \leqq k < n)$ について

$$ {}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1} $$

が成り立つことを示せ。なお、任意の非負整数 n, k $(0 \leqq k \leqq n)$ に対して二項係数 ${}_nC_k$ は

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} $$

で定義される整数である。ただし、$0! = 1$ であるとする。

(2)　任意の自然数 $n \geqq 1$ について以下の式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

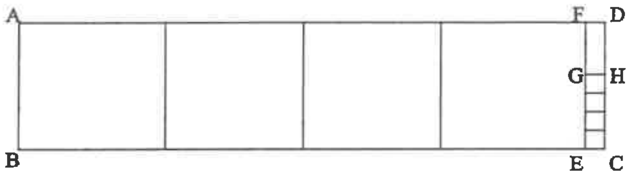
$$ \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i = 2^n $$

なお、この式は二項定理の特別な形である。証明において二項定理を用いてはならない。必要であれば問 (1) の等式を用いてもよい。

[V]

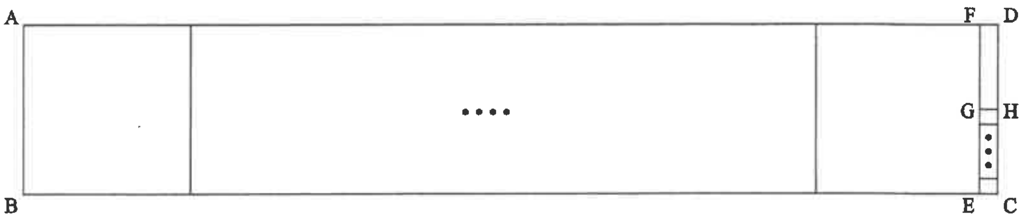
以下の問いに答えよ。

(1)　図のような短辺の長さが 1 である長方形 ABCD において、辺の長さを 1 とする正方形を左から 4 つ切り取った残りが長方形 FECD であるとする。この長方形 FECD において、辺の長さを EC とする正方形を下から 4 つ切り取った残りが長方形 GHDF であるとする。



長方形 GHDF が長方形 ABCD と相似であるとき、辺 AD の長さを求めよ。

(2)　n を自然数とする。図のような短辺の長さが 1 である長方形 ABCD において、辺の長さを 1 とする正方形を左から n 個切り取った残りが長方形 FECD であるとする。この長方形 FECD において、辺の長さを EC とする正方形を下から n 個切り取った残りが長方形 GHDF であるとする。



長方形 GHDF が長方形 ABCD と相似であるとき、辺 AD の長さを求めよ。

(3)　任意の自然数 n に対して

$$\sqrt{n^2+1}-n<1$$

であることを証明せよ。

(4)　nを自然数とするとき、

$$k \leqq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n} < k+1$$

を満たす整数kをnの多項式として表せ。